نوشته محمد ظاهر رفعت معلم لیسه کشیرالرشتوی ولسوالی المار ولایت فاریاب.

محاسبه لوگارتم اعداد به هر قاعده

بدون کاربرد جدول

چکیده

لوگارتم اعداد یکی از روش های محاسبات ریاضی است. که در سایر مباحث ریاضیات کاربرد دارد. در این نسخه سعی به عمل آمده تا روش نوین محاسبه لوگارتم اعداد به قاعده های مختلف را برای خواننده گان عزیز معرفی نمایم.

این روش بر حسب تعریف لوگارتم، خواص مساوات، قوانین طاقت و موقعیت اعداد نظر به نمای قاعده استوار است. فراگیری این روش سهل بوده حتی شاگردان دوره متوسطه مکاتب قادر به فراگیری آن می باشند. در پروگرام های درسی مکاتب برای محاسبه لوگارتم اعداد به قاعده های مختلف از جدول لوگارتم معمولی استفاده می شود. اما با استفاده از روشی که درین نسخه بیان میگردد میتوانیم لوگارتم اعداد را به قاعده های مختلف بدون کاربرد جدول لوگارتم محاسبه نمائیم و جداول لوگارتم را به قاعده های مختلف ترتیب نمائیم.

محاسبه لوگارتم معمولی اعداد

کلمه لوگارتم از لاتین جدید گرفته شده که دارای ریشه فرانسوی Logarithmus و ریشه یونانی Logos است. (C.L.BARNHART, 1970).

لوگارتم اعداد متشکل از دو قسمت بوده که قسمت تام عدد را بنام مشخصه Characteristicو بخش اعشاری آن را بنام Mantissa می نامند. (پروانی, ۱۳۴۴)

برای مشخص کردن مشخصه در لوگارتم معمولی از تعداد ارقام یکی را کم نموده باقی تعداد ارقام بحیث اعداد مشخصه Characteristic numbers محاسبه میگردد. (حسین, ۱۳۸۵)

در اینجا سوال مطرح می گردد چرا؟ مشخصه Characteristic را به این شیوه محاسبه میکنند. آیا این شیوه برای محاسبه مشخصه Characteristic تمام لوگارتم ها به قاعده های مختلف صدق می کند؟ در لابلای این بحث به جواب چنین پرسش ها پرداخته می شود. بحث خویش را در مورد با ذکر مثال اول صفحه (۱۶۹) کتاب ریاضی صنف یازدهم لیسه ها منتشره سال ۱۳۹۰ آغاز می کنیم.

مثال: $\log\frac{5}{2}$ را محاسبه کنید. در صورتی که $\log 5 = 0\cdot 6900$ ، $\log 2 = 0\cdot 3010$ باشد.

شاگرد می پرسد $\log 5 = 0\cdot 6900$ و $\log 2 = 0\cdot 3010$ از کجا شد؟ اگر در مقابل برایش گفته شود که این قیمت ها از جدول لوگارتم اخذ شده، باز هم شاگرد می پرسد که کدام راه دیگر برای بدست آوردن چنین اعداد موجود است؟ به اینچنین سوالات چه پاسخ دارید؟

برای یافتن پاسخ به چنین سوالات در گام نخست به تعریف لوگارتم مراجعه می کنیم.

تعریف : لوگارتم عبارت از طرز ارائه نوع دیگر از طاقت می باشد و یا این که محاسبه توان مجهول را به نام لوگارتم یاد می کنند.

$$\log_a y = x \iff y = a^x$$

در رابطه فوق a را به نام قاعده $(Base)$ و y را به نام لوگارتم عدد یاد می کنند. لوگارتم یک عدد داده شده عبارت از توانیست که اگر قاعده به آن توان بلند برده شود. عدد داده شده را افاده می کند.

اکنون با فرض $\log_{10} 2 = A$ داریم.

$$10^A = 2 \cdots *$$

از جدول (۱) موقعیت A را تعیین می کنیم.

جدول (۱) جدول نمای عدد (10)

N	10^n	
0	10^0	1
1	10^1	10
2	10^2	100
3	10^3	1000
4	10^4	10000
5	10^5	100000
6	10^6	1000000
7	10^7	10000000
8	10^8	100000000
9	10^9	1000000000

نظربه جدول (1) موقعیت عدد 2 چنین است.

$$1 < 2 < 10 \quad \equiv \quad 10^0 < 10^{[A]} < 10^1$$

از رابطه بالا نتیجه می شود.

$$0 < A < 1$$

با فرض $A = 0 \cdot mnop$ و قرار دادن آن در رابطه * داریم.

$$10^{0.mnop} = 2 \cdots **$$

با در نظر داشت خواص مساوات اطراف رابطه (**) را به توان (10) بالا می بریم.

$$(10^{0.mnop})^{10} = 2^{10}$$

با استفاده از خاصیت نما در نما $(a^m)^n = a^{mn}$ نوشته می توانیم:

(Collins, et al., 1998)

$$10^{m.nop} = 1024$$

$$1000 < 1024 < 10000 \quad \equiv \quad 10^3 < 10^{[m.nop]} < 10^4$$

$$3 < [m.nop] < 4 \quad \Rightarrow m = 3$$

با قرار دادن قیمت $m = 3$ در رابطه $10^{m.nop} = 1024$ داریم

$$10^{3.nop} = 1024$$

با استفاده از قوانین طاقت نوشته می توانیم

$$10^3 \cdot 10^{0.nop} = 1024$$

اطراف مساوات فوق را تقسیم10^3 نموده داریم.

$$10^{0.nop} = 1.024$$

اطراف رابطه فوق را به توان (10) بالا می بریم.

$$(10^{0.nop})^{10} = (1.024)^{10}$$

$$10^{[n.op]} = 1.2675$$

$$1 < 1.2675 < 10 \quad \equiv \quad 10^{0} < 10^{[n.op]} < 10^{1}$$

$$0 < [n.op] < 1 \quad \Rightarrow n = 0$$

با قرار دادن قیمت $n = 0$ در رابطه $10^{n.op} = 1.2675$ داریم

$$10^{0.op} = 1.2675$$

اطراف رابطه فوق را به توان (10) بالا می بریم.

$$(10^{0.op})^{10} = (1.2675)^{10}$$

$$10^{[o.p]} = 10.7024$$

$$10 < 10.7024 < 100 \quad \equiv \quad 10^{1} < 10^{[o.p]} < 10^{2}$$

$$1 < [o.p] < 2 \Rightarrow o = 1$$

با قرار دادن قیمت $o = 1$ در رابطه $10^{o.p} = 10.7024$ داریم

$$10^{1.p} = 10.7024$$

با استفاده از قوانین طاقت نوشته می توانیم

$$10^{1} \cdot 10^{0.p} = 10.7024$$

اطراف مساوات فوق راتقسیم 10^{1} نموده داریم.

$$10^{0.p} = 1.07024$$

اطراف رابطه فوق رابه توان $(10\ )$بالا می بریم.

$$(10^{0.p})^{10} = (1.07024)^{10}$$

$$10^{[p.\cdots]} = 1.9708$$

$$1 < 1.9708 < 10 \quad \equiv \quad 10^{0} < 10^{[p.\cdots]} < 10^{1}$$

$$0 < [p.\cdots] < 1 \Rightarrow p = 0$$

با قرار دادن قیمت ها در A داریم

$$A = 0 \cdot mnop \quad \equiv \quad A = 0.3010$$

(نادری & عزیزی, ۱۳۶۱)

با قرار دادن قیمت A در رابطه $\log_{10} 2 = A$ داریم

$$\log_{10} 2 = 0.3010$$

اکنون با فرض $\log_{10} 5 = B$ داریم.

$$10^{B} = 5 \cdots *$$

نظر به جدول موقعیت عدد 5 چنین است.

$$1 < 5 < 10 \quad \equiv \quad 10^0 < 10^{[B]} < 10^1$$

از رابطه بالا نتیجه می شود.

$$0 < B < 1$$

با فرض $B = 0 \cdot mnop$ و قرار دادن آن در رابطه * داریم.

$$10^{0.mnop} = 5 \cdots **$$

با در نظرداشت خواص مساوات اطراف رابطه (**) را به توان (10) بالا می بریم.

$$(10^{0.mnop})^{10} = 5^{10}$$

$$10^{[m.nop]} = 9765625$$

$$1000000 < 9765625 < 10000000 \quad \equiv \quad 10^6 < 10^{[m.nop]} < 10^7$$

$$6 < [m.nop] < 7 \Rightarrow m = 6$$

با قرار دادن قیمت $m = 6$ در رابطه $10^{m.nop} = 9765625$ داریم

$$10^{6.nop} = 9765625$$

با استفاده از قوانین طاقت نوشته می توانیم

$$10^6 \cdot 10^{0.nop} = 9765625$$

$$10^{0.nop} = 9.765625$$

$$10^{[n.op]} = 7888609052.210118$$

$$1000000000 < 7888609052.210118 < 10000000000$$

$$\equiv \quad 10^9 < 10^{[n.op]} < 10^{10}$$

$$9 < [n.op] < 10 \Rightarrow n = 9$$

با قرار دادن قیمت $n = 9$ در رابطه $10^{n.op} = 7888609052.210118$ داریم

$$10^{9.op} = 7888609052.210118$$

با استفاده از قوانین طاقت نوشته می توانیم

$$10^9 \cdot 10^{0.op} = 7888609052.210118$$

اطراف مساوات فوق را تقسیم 10^9 نموده داریم.

$$10^{0.op} = 7.8886090521$$

اطراف رابطه فوق را به توان (10) بالا می بریم.

$$(10^{0.op})^{10} = (7.8886090521)^{10}$$

$$10^{o.p} = 933263618.50322$$

$$100000000 < 933263618.50322 < 1000000000 \equiv 10^8 < 10^{[o.p]} < 10^9$$
$$8 < [o.p] < 9 \Rightarrow o = 8$$

با قرار دادن قیمت $o = 8$ در رابطه $10^{o.p} = 933263618.50322$ داریم

$$10^{8.p} = 933263618.50322$$

با استفاده از قوانین طاقت نوشته می توانیم

$$10^8 \cdot 10^{0.p} = 933263618.50322$$

اطراف مساوات فوق راتقسیم 10^8 نموده داریم.

$$10^{0.p} = 9.33263618503$$

اطراف رابطه فوق رابه توان (10) بالا می بریم.

$$(10^{0.p\cdots})^{10} = (9.33263618503)^{10}$$
$$10^{[p.\cdots]} = 5012372749.195$$
$$1000000000 < 5012372749.195 < 10000000000$$
$$\equiv 10^9 < 10^{[p.\cdots]} < 10^{10}$$
$$9 < [p.\cdots] < 10 \Rightarrow p = 9$$

با قرار دادن قیمت ها در B داریم

$$B = 0 \cdot mnop \quad \equiv B = 0.6989$$

با قرار دادن قیمت B در رابطه $\log_{10} 5 = B$ داریم

$$\log_{10} 5 = 0.6989$$

قیمت دریافت شده با قیمت داده شده سوال مغایرت دارد. جهت تثبیت قیمت درست لوگارتم متذکره نیاز است از اسباب محاسباتی نظیر کامپیوتر، ماشین حساب و یا کتاب جدول لوگارتم استفاده گردد. روی این ملحوظ ما با مراجعه به صفحه (1) کتاب جدول لوگارتم می بینیم :

$$\log_{10} 5 = 0.6989$$

(دلیل & زلمی، ۱۳۶۲)

این مقایسه درواقع نقد اشتباه کتاب درسی ریاضی صنف یازدهم لیسه ها بوده و از جانب دیگر نشاندهنده مزیت این روش می باشد. با کمال تاسف نقیصه موجود کتاب درسی ریاضی صنف یازدهم لیسه ها در چاپ بعدی سال ۱۳۹۴ نیز موجود بوده، وسیلتاً از ذوات محترم که مسوولیت تصحیح کتب

درسی را دارند تقاضا میدارم در مورد رفع نواقص کتب درسی مسوولانه توجه عمیق بدارند تا مسوولیت و دین وظیفوی و رسالت وطنی خود را بوجه حسن انجام داده باشند. (درسی, ۱۳۹۴)

حالا بخاطر دریافت قیمت $\log\frac{5}{2}$ از رابطه ذیل استفاده می کنیم.

$$\log\frac{x}{y} = \log x - \log y$$

(خلیلی, ۱۳۸۹)

بناً نوشته می توانیم

$$\log\frac{5}{2} = \log 5 - \log 2$$

$$\log\frac{5}{2} = 0.6989 - 0.3010$$

$$\log\frac{5}{2} = 0.3979$$

هر عدد $a > 0$، $a \neq 1$ به حیث قاعده لوگارتم شده میتواند.

با دریافت قیمت $\log 2$ میتوان $\log 4$،$\log 8$،$\log 16$،$\cdots$ را با بکار بردن قوانین و خواص لوگارتم اعداد محاسبه کرد. اینک در ذیل با استفاده از فورمول

$$\log_a M^n = n \log_a M$$

لوگارتم اعداد فوق را محاسبه میداریم: (محمد عظیم خاموش ومحمدکبیرصمیمی, ۱۳۷۸)

$$\log 4 = \log 2^2 = 2\log 2 = 2 \cdot 0.3010 = 0.6020$$

$$\log 8 = \log 2^3 = 3\log 2 = 3 \cdot 0.3010 = 0.9030$$

$$\log 16 = \log 2^2 = 4\log 2 = 4 \cdot 0.3010 = 1.2040$$

مثال: اگر $\log 2 = 0.3010$،$\log 3 = 0.4771$ باشد. $\log 6$ چند است؟ (حمیدی, ۱۳۹۲)

بخاطر محاسبه مثال فوق از خاصیت ذیل استفاده می کنیم:

$$\log(M \cdot N) = \log M + \log \mathrm{N}$$

(جمشیدی, ۱۳۸۷)

$$\log 6 = \log(2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3$$

$$\log 6 = 0.3010 + 0.4771$$

$$\log 6 = 0.7781$$

به شیوه فوق میتوان جدول لوگارتم معمولی را تهیه و ترتیب کرد. جدول (۲) در ذیل نمونه کار تحقیقاتی شاگــردان لیسه عــالــی خراسان در سال تعلیمی ۱۳۹۶ می باشد. کــه اوشان توانستند لــــــوگــارتم اعداد بین (۱-۱۰۰) را با شش رقم مانتیس محاسبه نموده اند.

جدول (۲) جدول لوگارتم با مانتیس 6 رقمی

جدول لوگاریتم

x	$\log x$	x	$\log x$	x	$\log x$	x	$\log x$
1	0.000000	26	1.414973	51	1.707570	76	1.880813
2	0.301029	27	1.431363	52	1.716003	77	1.886490
3	0.477121	28	1.447158	53	1.724275	78	1.892094
4	0.602059	29	1.462397	54	1.732393	79	1.897627
5	0.698979	30	1.477121	55	1.740362	80	1.903089
6	0.778151	31	1.491361	56	1.748188	81	1.908485
7	0.845098	32	1.505149	57	1.755874	82	1.913813
8	0.903089	33	1.518513	58	1.763427	83	1.919078
9	0.954242	34	1.531478	59	1.770852	84	1.924279
10	1.000000	35	1.544068	60	1.778151	85	1.929418
11	1.041392	36	1.556302	61	1.785329	86	1.934498
12	1.079181	37	1.568201	62	1.792391	87	1.939519
13	1.113943	38	1.579783	63	1.799340	88	1.944482
14	1.146128	39	1.591064	64	1.806179	89	1.949390
15	1.176091	40	1.602059	65	1.812913	90	1.954242
16	1.204119	41	1.612783	66	1.819543	91	1.959041
17	1.230448	42	1.623249	67	1.826074	92	1.963787
18	1.255272	43	1.633468	68	1.832508	93	1.968482
19	1.278753	44	1.643452	69	1.838849	94	1.973127
20	1.301029	45	1.653212	70	1.845098	95	1.977723
21	1.322219	46	1.662757	71	1.851258	96	1.982271
22	1.342422	47	1.672097	72	1.857332	97	1.986771
23	1.361727	48	1.681241	73	1.863322	98	1.991226
24	1.380211	49	1.690196	74	1.869231	99	1.995635
25	1.397940	50	1.698979	75	1.875061	100	2.000000

استخراج کننده گان:-- ولید ارسلان «کریمی»، احمد منیر «حمیدی»، احمد خالد «خرسند»، قدرت الله «سروری»، شمس الدین «حیدری»، فایز «نوری» ؛ متعلمین صنف یازدهم «ز»

تحت نظر استاد: محمد ظاهر «رفعت» معلم لیسه عالی خراسان.

لوگارتم اعداد به قاعده های مختلف

لوگارتم به قاعده های مختلف با استفاده از فورمول مربوط لوگارتم قاعده (10) که لوگارتم معمولی نامیده می شود. در گذشته استفاده از جدول لوگارتم معمولی در محاسبات ریاضی معمول بود. (JAMES NECHOLSON. CHRISTOPHER CLAPHAM. , 1993)

درین بحث ما لوگارتم اعداد را به قاعده های مختلف به روش جدید محاسبه خواهیم کرد. روی این ملحوظ چند مثال از لوگارتم اعداد به قاعده های مختلف کار می کنیم.

مثال: مطلوب است!

$\log_3 5 = ?$

با فرض $\log_3 5 = x$ داریم.

$3^x = 5 \cdots *$

از جدول (۳) موقعیت x را تعیین می کنیم.

جدول (۳) جدول نمای قاعده لوگارتم $\log_3 5$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3^0	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	3^8	3^9
1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683

نظر به جدول موقعیت عدد 5 چنین است.

$3 < 5 < 9 \quad \equiv \quad 3^1 < 3^x < 3^2$

از رابطه بالا نتیجه می شود.

$1 < x < 2$

با فرض $A = 1 \cdot mnop$ و قرار دادن آن در رابطه * داریم.

$3^{1.mnop} = 5 \cdots **$

با استفاده از قوانین طاقت نوشته می توانیم

$3 \cdot 3^{0.mnop} = 5$

اطراف رابطه فوق را تقسیم عدد 3 نموده داریم

$3^{0.mnop} = 1.6666666666$

با در نظر داشت خواص مساوات اطراف رابطه بالا را به توان (10) بالا می بریم.

$(3^{0.mnop})^{10} = (1.6666666666)^{10}$

$3^{[m.nop]} = 165.381716$

$81 < 165.381716 < 243 \quad \equiv \quad 3^4 < 3^{[m.nop]} < 3^5$

$4 < [m.nop] < 5 \Rightarrow m = 4$

با قرار دادن قیمت $m = 4$ در رابطه $3^{m.nop} = 165.381716$ داریم

$3^{4.nop} = 165.381716$

با استفاده از قوانین طاقت نوشته می توانیم

$3^4 \cdot 3^{0.nop} = 165.381716$

اطراف مساوات فوق راتقسیم 3^4 نموده داریم.

$3^{0.nop} = 2.041749$

اطراف رابطه فوق را به توان (10) بالا می بریم.

$(3^{0.nop})^{10} = (2.041749)^{10}$
$3^{[n.op]} = 1258.997224$
$729 < 1258.997224 < 2187 \quad \equiv \quad 3^6 < 3^{[n.op]} < 3^7$
$6 < [n.op] < 7 \;\Rightarrow n = 6$

با قرار دادن قیمت $n = 6$ در رابطه $3^{n.op} = 1258.997224$ داریم

$3^{n.op} = 1258.997224$
$3^{6.op} = 1258.997224$

با استفاده از قوانین طاقت نوشته می توانیم

$3^6 \cdot 3^{o.op} = 1258.997224$

اطراف مساوات فوق را تقسیم 3^6 نموده داریم.

$3^{o.op} = 1.727019$

اطراف رابطه فوق را به توان (10) بالا می بریم.

$(3^{0.op})^{10} = (1.727019)^{10}$
$3^{[o.p\cdots]} = 236.032847$
$81 < 236.032847 < 243 \quad \equiv \quad 3^4 < 3^{[o.p\cdots]} < 3^5$
$4 < [o.p\cdots] < 5 \;\Rightarrow o = 4$

با قرار دادن قیمت $o = 4$ در رابطه $3^{o.p} = 236.032847$ داریم

$3^{4.p} = 236.032847$

با استفاده از قوانین طاقت نوشته می توانیم

$3^4 \cdot 3^{0.p} = 236.032847$

اطراف مساوات فوق را تقسیم 3^4 نموده داریم.

$3^{0.p} = 2.913985$

اطراف رابطه فوق را به توان (10) بالا می بریم.

$(3^{0.p})^{10} = (2.913985)^{10}$
$3^{[p.\cdots]} = 44144.261847$
$19683 < 44144.261847 < 59049 \quad \equiv \quad 3^9 < 3^{[p.\cdots]} < 3^{10}$
$9 < [p.\cdots] < 10 \Rightarrow p = 9$

با قرار دادن قیمت ها در x داریم

$x = 1 \cdot mnop \quad \equiv \quad x = 1.4649$

با قرار دادن قیمت x در رابطه $\log_3 5 = x$ داریم

$$\log_3 5 = 1.4649$$

امتحان: برای امتحان صحت عملیه از رابطه $\log_b a = \frac{\log_{10} a}{\log_{10} b}$ استفاده می کنیم.

(هروی، ۱۳۸۴)

$$\log_3 5 = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3} = \frac{0.6989}{0.4771} = 1.4649$$

مثال: $\log_5 7$ را دریابید!

اکنون با فرض $\log_5 7 = B$ داریم.

$$5^B = 7 \cdots *$$

نظربه جدول (۴) موقعیت عدد 7 چنین است.

جدول (۴) جدول نمای قاعده لوگارتم $\log_5 7$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5^0	5^1	5^2	5^3	5^4	5^5	5^6	5^7	5^8	5^9
1	5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125

$$5 < 7 < 25 \quad \equiv \quad 5^1 < 10^B < 5^2$$

از رابطه بالا نتیجه می شود.

$$1 < B < 2$$

با فرض $B = 1 \cdot mnop$ و قرار دادن آن در رابطه * داریم.

$$5^{1.mnop} = 7 \cdots **$$

با استفاده از قوانین طاقت نوشته می توانیم

$$5^1 \cdot 5^{0.mnop} = 7$$

اطراف مساوات فوق را تقسیم 5^1 نموده داریم.

$$5^{0.mnop} = 1.4$$

با در نظرداشت خواص مساوات اطراف رابطه فوق را به توان (10) بالا می بریم.

$$(5^{0.mnop})^{10} = (1.4)^{10}$$
$$5^{[m.nop]} = 28.925465$$
$$25 < 28.925465 < 125 \quad \equiv \quad 5^2 < 5^{[m.nop]} < 5^3$$
$$2 < [m.nop] < 3 \Rightarrow m = 2$$

با قرار دادن قیمت $m = 2$ در رابطه $5^{m.nop} = 28.925465$ داریم:

$$5^{2.nop} = 28.925465$$

با استفاده از قوانین طاقت نوشته می توانیم

$$5^2 \cdot 5^{0.nop} = 28.925465$$

اطراف مساوات فوق را تقسیم 5^2 نموده داریم.

$$5^{0.nop} = 1.157019$$

اطراف رابطه فوق را به توان (10) بالا می بریم.

$$(5^{0.nop})^{10} = (1.157019)^{10}$$
$$5^{[n.op]} = 4.299371$$
$$1 < 4.299371 < 5$$
$$\equiv \quad 5^0 < 5^{[n.op]} < 5^1 \quad \Rightarrow n = 0$$

با قرار دادن قیمت $n = 0$ در رابطه $5^{n.op} = 4.299371$ داریم:

$$5^{0.op} = 4.299371$$
$$(5^{0.op})^{10} = (4.299371)^{10}$$
$$5^{[o.p]} = 2157989.003937$$
$$1953125 < 2157989.003937 < 9765625$$
$$\equiv \quad 5^9 < 5^{[o.p]} < 5^{10} \quad \Rightarrow o = 9$$

با قرار دادن قیمت $o = 9$ در رابطه $5^{o.p} = 2157989.003937$ داریم

$$5^{9.p} = 2157989.003937$$

با استفاده از قوانین طاقت نوشته می توانیم

$$5^9 \cdot 5^{0.p} = 2157989.003937$$
$$5^{0.p} = 1.104890$$
$$(5^{0.p})^{10} = (1.104890)^{10}$$
$$5^{[p.\cdots]} = 2.711389$$
$$1 < 2.711389 < 5$$
$$\equiv 5^0 < 5^{[p.\cdots]} < 5^1 \Rightarrow p = 0$$

با قرار دادن قیمت ها در B داریم

$$B = 1 \cdot mnop \quad \equiv B = 1.2090$$

امتحان: برای امتحان صحت عملیه از رابطه $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$ استفاده می کنیم:
(A.F.Bermant I.G.Aramanovich, 1973)

$$\log_5 7 = \frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 5}$$

$$\log_5 7 = \frac{0.8450}{0.6989}$$

$$\log_5 7 = 1.2090$$

دریافت لوگارتم طبیعی

لوگارتم طبیعی یا نپرین Naperian که قاعده درآن(e) است. (امین, ۱۳۸۷)

و عدد e حدوداً شامل فاصله

$$2.7 < e < 2.75$$

این سیستم لوگارتم درثبوت تیوری های ریاضی بکار میرود.

(جمعی ازاساتید المان مترجم غلام رضا یاسی پور, ۱۳۷۹)

قیمت عدد $e = 2.7182818284\cdots$ است.

(N PISKUNOV –TRANSLATED FROM THE RUSSIAN BY G.YANKOVSKY , 1969)

مثال: مطلوب است ! $ln\ 2$ (جمعی ازاساتید المان مترجم غلام رضا یاسی پور, ۱۳۷۹)

$$\ln 2 = \log_e 2 = A \qquad \equiv \quad e^A = 2$$

برای دریافت قیمت A جدول نمای عدد e را تشکیل میدهیم.

جدول (۵) نمایش نما های عدد e

n	e^n	
0	e^0	1
1	e^1	2.71828
2	e^2	7.38904
3	e^3	20.08549
4	e^4	54.59800
5	e^5	148.41265
6	e^6	403.42716
7	e^7	1,096.62799
8	e^8	2,980.94195
9	e^9	8,103.034872

در جدول فوق موقعیت عدد 2 چنین است.

$$1 < 2 < 2.71828 \quad \Rightarrow e^0 < e^A < e^1$$

از رابطه بالا نتیجه می شود.

$$0 < A < 1$$

با فرض $A = 0 \cdot mnop$ و قراردادن آن در رابطه * داریم.

$$e^{0.mnop} = 2 \cdots **$$

با در نظرداشت خواص مساوات اطراف رابطه (**) را به توان (10) بالا می بریم.

$$(e^{0.mnop})^{10} = 2^{10}$$
$$e^{[m.nop\cdots]} = 1024$$
$$403.42716 < 1024 < 1{,}096.62799 \quad \equiv \quad e^6 < e^{[m.nop\cdots]} < e^7 \quad \Rightarrow m = 6$$

با قرار دادن قیمت $m = 6$ در رابطه $e^{m.nop} = 1024$ داریم:

$$e^{6.nop} = 1024$$

با استفاده از قوانین طاقت نوشته می توانیم:

$$e^6 \cdot e^{0.nop} = 1024$$

اطراف مساوات فوق را تقسیمe^6 نموده داریم.

$$e^{0.nop} = 2.5382525$$

اطراف رابطه فوق را به توان (10) بالامی بریم:

$$(e^{0.nop})^{10} = (2.5382525)^{10}$$
$$e^{[n.op\cdots]} = 11{,}100.64531$$
$$8{,}103.03487 < 11{,}100.64531 < \ 22{,}026.317634$$
$$\equiv \quad e^9 < \ e^{[n.op\cdots]} \ < e^{10} \quad \Rightarrow n = 9$$

با قرار دادن قیمت $n = 9$ در رابطه $e^{n.op} = 11{,}100.64531$ داریم:

$$e^{9.op} = 11{,}100.64531$$

با استفاده از قوانین طاقت نوشته می توانیم:

$$e^9 \cdot e^{0.op} = 11{,}100.64531$$

اطراف مساوات فوق را تقسیمe^9 نموده داریم.

$$e^{0.op} = 1.36994$$

اطراف رابطه فوق را به توان (۱۰) بالا می بریم

$$(e^{0.op})^{10} = (1.36994)^{10}$$
$$e^{[o.p\cdots]} = 23.28174$$
$$20.08549 \ < \ 23.28174 < \ 54.59800 \equiv e^3 < e^{[o.p\cdots]} < e^4$$
$$3 < [o.p\cdots] < 4 \ \Rightarrow o = 3$$

با قرار دادن قیمت $o = 3$ در رابطه $e^{o.p} = 23.28174$ داریم:

$e^{3.p} = 23.2817$

با استفاده از قوانین طاقت نوشته می توانیم:

$e^3 \cdot e^{o.p} = 23.28174$

اطراف مساوات فوق را تقسیم e^9 نموده داریم.

$e^{o.p} = 1.159132$

اطراف رابطه فوق را به توان (10) بالا می بریم:

$(e^{o.p})^{10} = (1.15913)^{10}$

$e^{[p.\cdots]} = 4.378461$

$2.71828 < 4.378461 < 7.38904 \equiv e^1 < e^{[p.\cdots]} < e^2$

$1 < [p.\cdots] < 2 \quad \Rightarrow p = 1$

با قرار دادن قیمت ها در A داریم:

$A = 0 \cdot mnop \equiv A = 0.6931 \Rightarrow \ln 2 = 0.6931$

امتحان: جهت امتحان از رابطه ذیل استفاده می نمائیم.

$$\ln x = \frac{1}{\log_{10} e} \cdot \log_a x$$

چون $\log_{10} e = \log_{10} 2.71 \cdots = 0.4343$ است.

$$\ln x = \frac{1}{0.4343} \cdot \log x$$

$\ln x = 2.3026 \cdot \log x$

$\ln 2 = 2.3026 \cdot \log 2$

$\ln 2 = 2.3026 \cdot 0.3010$

$\ln 2 = 0.69308 \approx 0.6931$

رابطه اخیر نشان میدهد که قیمت بدست آمده $\ln 2$ صحت است.

همچنان صحت عملیه را میتوان توسط رابطه ذیل امتحان نمود.

$\ln x = \ln 10 \cdot \log x$

(غوری, ۱۳۸۷)

$\ln 2 = \ln 10 \cdot \log 2$

$\ln 2 = 2.30260.3010 = 0.6931$

مثال: مطلوب است ! $ln1\,25$

برای محاسبه مثال فوق در قبال روش فوق می توان ازروش ساده سازی نیز استفاده کرد.

$ln1\,25 = \ln 5^3 = 3 \ln 5 \cdots (1)$

حال به روش فوق $\ln 5$ را حساب می کنیم.

$\ln 5 = \log_e 5 = A \qquad \equiv \quad e^A = 5$

در جدول فوق موقعیت عدد ۵ چنین است.

$2.71828 < 5 < 7.38904 \quad \Rightarrow e^1 < e^A < e^2$

با فرض $A = 1.mnop$ و قرار دادن آن در رابطه * داریم.

$e^{1.mnop} = 5 \cdots *$

با استفاده از قوانین طاقت نوشته می توانیم:

$e^1 \cdot e^{0.mnop} = 5$

اطراف مساوات فوق را تقسیم e^1 نموده داریم.

$e^{0.mnop} = 1.83940$

اطراف رابطه فوق را به توان (10) بالا می بریم:

$(e^{0.mnop})^{10} = (1.83940)^{10}$

$e^{[m.nop]} = 443.36167$

$403.42716 < 443.36167 < 1{,}096.62799 \quad \equiv \quad e^6 < e^{m.nop} < e^7$

$6 < [m.nop] < 7 \Rightarrow \quad m = 6$

با قرار دادن قیمت $m = 6$ در رابطه $e^{m.nop} = 443.36167$ داریم:

$e^{6.nop} = 443.36167$

با استفاده از قوانین طاقت نوشته می توانیم:

$e^6 \cdot e^{0.nop} = 443.36167$

اطراف مساوات فوق را تقسیم e^6 نموده داریم:

$e^{0.nop} = 1.098989$

اطراف رابطه فوق را به توان (10) بالا می بریم:

$(e^{0.nop})^{10} = (1.098989)^{10}$

$e^{[n.op]} = 2.569982$

$1 < 2.569982 < 2.71828 \quad \equiv \quad e^0 < e^{[n.op]} < e^1$

$0 < [n.op] < 1 \quad \Rightarrow n = 0$

$e^{0.op} = 2.569982$

اطراف رابطه فوق را به توان (10) بالا می بریم:

$(e^{0.op})^{10} = (2.569982)^{10}$

$e^{[o.p\cdots]} = 12{,}569.00259$

$8{,}103.034872 < 12{,}569.00259 < 22{,}026.31764 \equiv e^9 < e^{[o.p\cdots]} < e^{10}$

$9 < [o.p\cdots] < 10 \Rightarrow o = 9$

با قرار دادن قیمت $o = 9$ در رابطه $e^{9.p} = 12{,}569.00259$ داریم:

$$e^{9.p} = 12{,}569.00259$$

با استفاده از قوانین طاقت نوشته می توانیم:

$$e^{9} \cdot e^{0.p} = 12{,}569.00259$$

اطراف مساوات فوق را تقسیم e^9 نموده داریم:

$$e^{0.p} = 1.55115$$

اطراف رابطه فوق را به توان (10) بالا می بریم:

$$(e^{0.p})^{10} = (1.55115)^{10}$$
$$e^{[p.\cdots]} = 80.63767$$
$$54.59800 < 80.63767 < 148.41265 \equiv e^4 < e^{[p.\cdots]} < e^5$$
$$4 < [p.\cdots] < 5 \Rightarrow p = 4$$

با قرار دادن قیمت ارقام m ،n ،o و p در A حاصل می داریم.

$$A = 1.mnop \equiv A = 1.6094$$

از جانب دیگر:

$$\ln 5 = \log_e 5 = 1.6094$$

قیمت فوق را در رابطه (۱) وضع نموده حاصل می کنیم.

$$ln1\,25 = \ln 5^3 = 3 \ln 5 \cdots (1)$$
$$ln1\,25 = \ln 5^3 = 3(1.6094) = 4.8282$$

روش تحقیق

قسمی که درچکیده تذکر یافت. این روش بر اساس تحلیل و بررسی عمیق مفاهیم و موضوعات مرتبط به لوگارتم طرح ریزی گردیده و تحقیق آن برحسب تطبیقات نتیجه گیری شده است.

- تحلیل: با توجه به جمله ذیل داریم.

لوگارتم یک عـدد داده شده عبارت از توانیست که اگـر قاعده به آن توان بلند برده شود. عدد داده شده را افاده می کند.

اکنون با فرض $\log_{10} 2 = A$ داریم:

$$10^A = 2$$

- نظر به نما قاعده موقعیت عدد A تعیین می گردد.

$$n - 1 < [A] < n$$

نوت: اگر عدد A بین دوتا عدد صحیح باشد. عدد $[A]$ مساوی میشود به عدد کم تر.

$$n - 1 < [A] < n \implies [A] = n - 1$$ (موئینی, ۱۳۸۸)

- رقم مورد نظر مشخصه و یا مانتیس در موقعیت فوق عدد $n - 1$ است.
- در صورتی که ارقام مشخصه عدد خلاف صفر باشد. اطراف مساوات را به عدد قاعده به نما خلاف صفر تقسیم میداریم.
- در صورتی که نما عدد اعشاری بشکل ذیل باشد،

$$10^{0.mnop} = 2$$

درینصورت: با استفاده از خواص مساوات، اطراف مساوات را به توان 10 بالا می بریم.

$$(10^{0.mnop})^{10} = 2^{10}$$
$$10^{[m.nop]} = 1024$$

برای تعیین قیمت رقم m از جدول نمای عدد 10 (نمای قاعده) استفاده می کنیم. لذا داریم:

$$1000 < 1024 < 10000 \equiv 10^3 < 10^{[m.nop]} < 10^4 \implies 3 \leq [m.nop] < 4$$

با در نظر داشت خاصیت [ ] قیمت را نوشته می توانیم:

$$m = 3$$

به همین ترتیب و به همین شیوه ما می توانیم مانتیس اعداد را تا چندین رقم کیفی به قاعده های مختلف محاسبه بداریم و لوگارتم های دلخواه را بدون موجودیت جدول لوگارتم محاسبه کنیم.

نتائیج

از لابلای مطالعه و بررسی محتوای مقاله هذا نتائیج ذیل حاصل می گردد.

۱- با استفاده از این روش میتوان مشخصه و مانتیس لوگارتم اعداد رابه قاعده های مختلف پیدا کرد.

۲- در لـوگارتم معمولی بـرای تعیین مشخـصه از تعـداد ارقـام یکی را کـم نموده، مشخصه را تعیین می نمودند. اما دلیل اصلی ذکر نمی شد. از تحلیل و بررسی ها چنین نتیجه شد.

لوگارتم هر عدد بین دو نمای قاعده واقع است. چون مشخصه لوگارتم عدد تام بوده و مساوی به نمای حد پایانی می باشد. موضوع مذکور توسط لسان ریاضی چنین افاده می گردد.

$$a^{n-1} \leq a^{[A]} < a^n \Longrightarrow n-1 \leq [A] < n \quad \Leftrightarrow \quad [A] = n-1$$

گذشته از رابطه فوق، دقت در نما های (10) بیان گر همین ادعا است.

عدد یک رقمی A، $10^0 \leq A < 10^1$ که مشخصه این اعداد (0) است.

عدد دو رقمی A، $10^1 \leq A < 10^2$ که مشخصه این اعداد (1) است.

عدد سه رقمی A، $10^2 \leq A < 10^3$ که مشخصه این اعداد (2) است.

$\vdots \qquad \vdots$

عدد n رقمی A، $10^{n-1} \leq A < 10^n$ که مشخصه این اعداد $(n-1)$ است.

در واقعیت رابطه $n-1 < [A] < n \implies [A] = n-1$ معرف روش فوق بوده و محتوای مقاله هذا مبین ادعا ی ماست.

۳- جهت دریافت مانتیس اعداد نیز از رابطه فوق استفاده نموده می توانیم.

۴- مانتیس اعداد لوگارتمیهمیشه یک عدد مثبت است.

۵- تعداد ارقام مانتیس را میتوان بصورت دلخواه بدست آورد.

ماخذ

امین ,ا .(1387) .ریاضیات آسان برای همه .کابل :انتشارات:پامیر.

پروانی ,ع .ا .(1344) .مثلثات برای لسه ها .کابل :نشرات ستردرستیز.

جمشیدی ,ف .ح .(1387) .ریاضییات عمومی1پیشرفته .تهران :انتشارات:صفار-اشراقی.

جمعی ازاساتید المان مترجم غلام رضا یاسی پور .(1379) .دایره المعارف ریاضیات .تهران :نشر مهاجر.

حسین ,ا .ز .(1385) .فرهنگ ریاضی قلزم .تهران :سیمای دانش.

حمیدی ,ع .(1392) .ریاضیات راه یابی بسوی تحصیلات .کابل :انتشارات:اقرا.

خلیلی ,ع .(1389) .ریاضی عمومی حساب والجبر .کابل :سلام ومستقبل.

درسی ,ر .ع .(1394) .ریاضی برای صنف .11

دلیل ,ح & ,.زلمی ,ن .(1362) .جدول لوگارتم و طرق استعمال آن .کابل :مطبعه تعلیم و تربیه.

غوری ,م .(1387) .ریاضی عمومی .کابل :سعید.

محمد عظیم خاموش ومحمدکبیرصمیمی .(1378) .ریاضیات برای همه .پشاور :مطبعه مرکز نشراتی.

موئینی ,س .(1388) .ریاضیات تجربی .تهران :مطبعه خیلی سبز.

نادری ,م & ,.عزیزی ,ع .(1361) .قاموس علایم ریاضیات .کابل :مطبعه تعلیم و تربیه.

هروی ,س .ر .(1384) .ریاضیات عمومی .2هرات :ناشر:موسسه ملی علوم.

A.F.Bermant I.G.Aramanovich. (1973). *MATHEMATICAL ANALYSIS.* Moscow: Mir.

C.L.BARNHART. (1970). *THE AMERICAN COLLEGE DICTIONNARY.* New yourk.

Collins, W., Cuevas, G., Foster, A., Gordon, B., Moore-Harris, B., Rath, J., . . . Winters, L. (1998). *Algebra1.* NewYork: McGraw-Hill.

JAMES NECHOLSON. CHRISTOPHER CLAPHAM. . (1993). *CONCISE OXFORD DICTIONARY OFMATHEMATICS.* OXFORD: UNIVERSITY PRESS.

N PISKUNOV –TRANSLATED FROM THE RUSSIAN BY G.YANKOVSKY . (1969). *DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS.* MOSCOW: MIR.